DHBW Ravensburg
Duale Hochschule Baden-Württemberg

Prüfung

Numerische Methoden · Prüfung 00 Probeklausur

Studiengang	W4DSKI_108 Data Science und Künstliche Intelligenz
Jahrgang	RV-WDS125 / RV-WDS225
Modul	Fortgeschrittene Lineare Algebra und Analysis
Veranstaltung	Numerische Methoden
Prüfer	Prof. Dr.-Ing. Mark Schutera
Datum	13.06.2026
Bearbeitungszeit	30 Minuten
Max. Punktzahl	25 Punkte
Hilfsmittel	kein Taschenrechner. Open book; alle gedruckten oder handschriftlichen Unterlagen, die auf Papier mitgebracht werden.

Anweisungen

Schreiben Sie Ihre Lösungen und Lösungswege auf die zusätzlich ausgeteilten Klausurbögen, nicht auf die Aufgabenblätter. Lösungen auf den Aufgabenblättern werden nicht gewertet. Die Heftung der Klausur bitte nicht entfernen. Ordnen Sie jede Lösung deutlich der zugehörigen Aufgabe zu. Begründen Sie Ihre Antworten kurz: eine reine Zahl ohne Rechenweg gibt keine volle Punktzahl. Schreiben Sie leserlich. Was nicht entzifferbar ist, wird nicht gewertet. Lesen Sie die Aufgabenstellung sorgfältig durch, bevor Sie mit der Bearbeitung beginnen. Lesen Sie ihre Lösungen am Ende noch einmal durch. Ich empfehle dafür, Zwischenlösungen einfach und Lösungen zweifach zu unterstreichen. Viel Erfolg!

Durch Prüfer auszufüllen

	1	2	Σ
Maximal	16	9	25
Erreicht	_____	_____	_____

Aufgabe 1

16 Punkte

(a) Sie entwerfen ein Gleitkommasystem (floating-point system) mit 1 Vorzeichenbit und 4 weiteren Bits, die Sie frei auf Mantisse (mantissa) und Exponent (exponent) verteilen können. *4 Punkte*

Diskutieren Sie den Trade-off zwischen Mantissen- und Exponentenbits. Welche Eigenschaft des Systems verbessert sich, wenn Sie ein weiteres Bit der Mantisse zuweisen, welche, wenn Sie es dem Exponenten geben? Zeigen und diskutieren Sie anhand der Auflösung (resolution) und des Wertebereichs (dynamic range).

Fixieren wir die Aufteilung nun auf 2 Mantissenbits und 2 Exponentenbits mit Bias 1. Bestimmen Sie das Maschinenepsilon (machine epsilon) $\varepsilon_{\text{mach}}$ dieses Systems.

Berechnen Sie in diesem System das Ergebnis des Ausdrucks

$$\frac{1}{(1+0{,}1)-1}.$$

Geben Sie den Nenner nach Rundung sowie das Endergebnis an.

Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem mathematischen Wert des Ausdrucks und erklären Sie, warum hier die Auslöschung (catastrophic cancellation) das Resultat zerstört.

(b) Wir suchen die Lösung des linearen Systems *4 Punkte*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

mit einer Gitter-Suche (grid search) über $w, b \in \{0, 1, 2\}$.

Wählen Sie ein Fehlermaß (error) für die Gitter-Suche und begründen Sie Ihre Wahl kurz.

Bestimmen Sie anhand des gewählten Fehlermaßes die optimalen Werte $b*$ und $w*$.

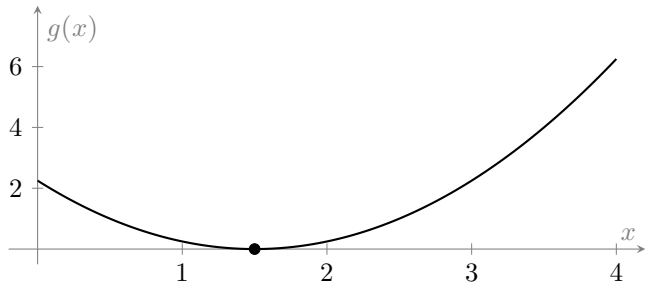
Vergleichen Sie das Ergebnis der Gitter-Suche mit der exakten Lösung des Systems. Erklärt die Gitter-Suche das System exakt? Begründen Sie kurz. Wie könnten Sie die Gitter-Suche weiter verbessern, ist es grundsätzlich möglich mit dieser Methode eine exakte Lösung zu finden?

Hinweis. Die exakte Lösung des Systems lautet $w^\star = 6/5$ und $b^\star = 7/5$.

(c) Wir suchen das Minimum der Funktion *8 Punkte*

$$g(x) \;=\; (x - \tfrac{3}{2})^2$$

auf dem Intervall $[0,\ 4]$ mit stückweise konstanter gitterbasierter Diskretisierung (piecewise constant discretization) bei zwei Schrittweiten $h_1 = 1$ und $h_2 = \frac{1}{2}$. Die diskretisierte Funktion $\hat{g}$ wird am nächstgelegenen Gitterpunkt ausgewertet. Die Eingabe sei durch Messfehler um $\tilde{x} = x \pm \frac{1}{2}$ gestört.



Analysieren Sie nacheinander die vier Eigenschaften der Fehleranalyse.

Quantifizieren Sie die Konditionierung (conditioning) des Problems an mindestens zwei Stellen Ihrer Wahl im Intervall und zeigen Sie so den Unterschied zwischen gut und schlecht konditionierten Bereichen.

Berechnen Sie die Stabilität (stability) der diskretisierten Funktion $\hat{g}$ bei einem Referenzpunkt Ihrer Wahl. Welche Schrittweite führt zur stabileren Auswertung? Begründen Sie kurz.

Quantifizieren Sie die Konsistenz (consistency) der diskretisierten Funktion für h_1 und h_2. Welche Schrittweite ist konsistenter?

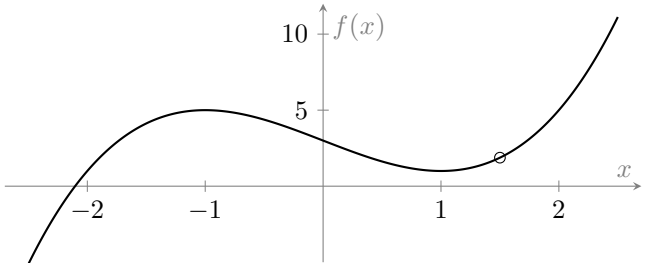
Verbinden Sie Stabilität und Konsistenz zur Konvergenz (convergence) in der Nähe des Minimums für h_1 und h_2. Führt eine kleinere Schrittweite bei numerischen Verfahren zwingend zu einer besseren Approximation? Begründen Sie kurz.

Aufgabe 2

9 Punkte

(a) Wir suchen eine Nullstelle (root) der Funktion *7 Punkte*

$$f(x) \;=\; x^3 - 3x + 3.$$



Der eingezeichnete offene Kreis markiert den Startwert $x_0 = \frac{3}{2}$.

Führen Sie zwei Iterationen des Newton-Verfahrens (Newton's method) durch. x_1 und x_2 darf jeweils als Bruch angegeben werden.

Hinweis. Die Ableitung f' darf direkt analytisch aus der Funktionsgleichung gebildet werden.

Diskutieren Sie die dabei gemachte Beobachtung. In welchem anderen Punkt auf f(x) hätten wir eine ähnliche Beobachtung gemacht?

Nennen Sie das Konvergenzkriterium (convergence criterion) für das Newton-Verfahren.

Nehmen Sie nun an, dass f nicht in geschlossener Form gegeben ist, sondern nur durch Funktionsauswertungen zugänglich gemacht werden kann. Geben Sie eine numerische Approximation (numerical approximation) für $f'(x_0)$ an. Wie groß ist der Approximationsfehler?

Wie verändert sich damit die Beobachtung aus der ersten Iteration? Begründen Sie qualitativ und leiten sie daraus eine Methode ab mit der ein Versagensmodus der Newton-Nullstellensuche umgangen werden kann.

(b) Wir wechseln zur Minimumsuche auf einer rauen Verlustlandschaft (loss landscape). Betrachten Sie die Funktion *2 Punkte*

$$f(x) \;=\; (x-1)^2 + \tfrac{1}{2}\sin(2\pi x), \qquad x \in [0,\ 2].$$

Erklären Sie kurz, warum der hochfrequente Sinus-Term problematisch sein kann für lokale Optimierer.

Um diese Problematik zu umgehen, gibt es neben globalen Optimierungsmethoden einen weiteren Ansatz. Nennen Sie diesen Ansatz und wählen Sie eine dafür geeignete Schrittweite h.